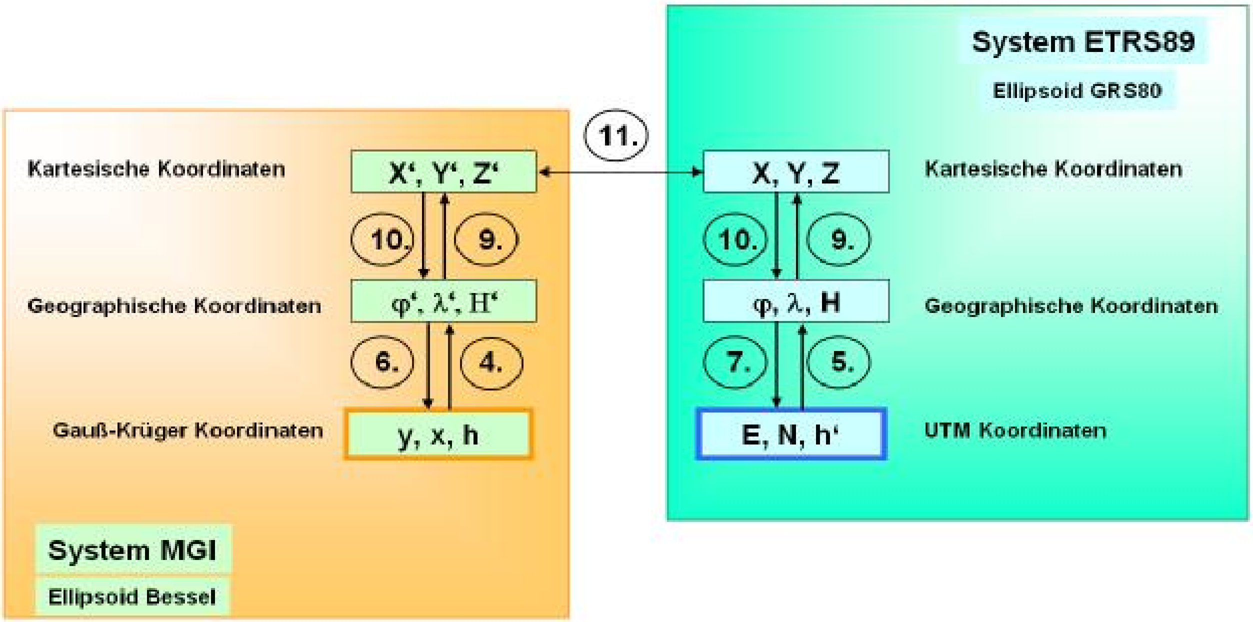
Transformation von Gauß-Krüger(GK)-Koordinaten des Systems MGI in Universal Transversal Mercator(UTM)-Koordinaten des Systems ETRS89

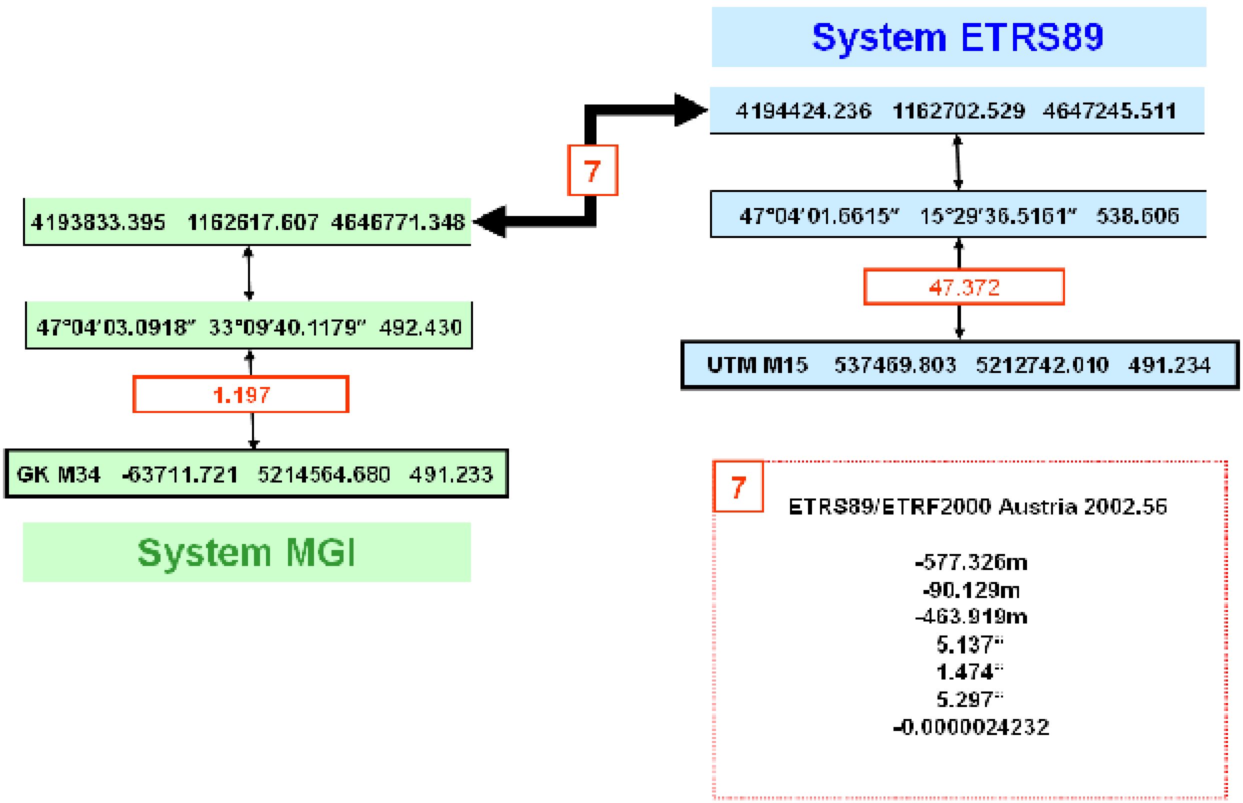
BEV - Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen

1. Inhaltsverzeichnis

2. Überblick

Der Leitfaden für die Anwendung der nachstehend angeführten Parameter und der Berechnungsformeln wird in Form einer graphischen Übersicht übermittelt. Das jeweils nötige Kapitel ist ebenfalls aus der Grafik ersichtlich. Über das Zahlenbeispiel kann die gesamte Funktionalität überprüft werden.





3. Ellipsoidparameter und abgeleitete Größen:

Parameter Bessel-Ellipsoid:
große Halbachse: $a = 6\,377\,397{,}15508$ m
kleine Halbachse: $b = 6\,356\,078{,}96290$ m

Parameter Ellipsoid GRS80:
große Halbachse: $a = 6\,378\,137{,}00000$ m
kleine Halbachse: $b = 6\,356\,752{,}31425$ m

davon abgeleitete Größen:

Polkrümmungsradius: $c = \frac{a^2}{b}$

Abplattung: $f = \frac{a - b}{a}$

1. numerische Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

2. numerische Exzentrizität $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

von der geographischen Breite abhängige Größen:

$$t = \tan \varphi$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$$

$$V = \sqrt{1 + h^2}$$

Meridiankrümmungsradius $M = \frac{c}{V^3}$

Normalkrümmungsradius $N = \frac{c}{V}$

Länge des Meridianbogens B^j :

$$B^j = \alpha \varphi° - \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi - \delta \sin 6\varphi \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

Einheit in Meter

$$\alpha = \frac{A\, a\, (1 - e^2)}{\rho°} \qquad \rho° = \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = \frac{B}{2}\, a\, (1 - e^2)$$

$$\gamma = \frac{C}{4}\, a\, (1 - e^2)$$

$$\delta = \frac{D}{6} a (1 - e^2)$$

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} + \ldots$$

z.B.: für das Bessel-Ellipsoid :

α = 111 120,61962 m/°
β = 15 988,6385 m
γ = 16,7300 m
δ = 0,0218 m

Fußpunktsbreite: (geographische Breite einer bestimmten Meridianbogenlänge B^{φ})

$$\varphi_x = \frac{B^{j}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sin 2\varphi_x - \frac{\gamma}{\alpha} \sin 4\varphi_x + \frac{\delta}{\alpha} \sin 6\varphi_x \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

Bestimmung durch Iteration !

4. Gauß-Krüger-Koordinaten à geographische Koordinaten

Geographische Breite φ:

$$\varphi = \varphi_x + \frac{y^2 t}{2N^2}(-1 - \eta^2) + \frac{y^4 t}{24N^4}(5 + 3t^2 + 6\eta^2 - 6t^2\eta^2 - 3\eta^4 - 9t^2\eta^4)$$

$$+ \frac{y^6 t}{720N^6}(-61 - 90t^2 - 45t^4 - 107\eta^2 + 162t^2\eta^2 + 45t^4\eta^2)$$

$$+ \frac{y^8 t}{40320\,N^8}(1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6)$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite ±3°

Geographische Länge λ:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{y}{N \cos\varphi_x} + \frac{y^3}{6N^3 \cos\varphi_x}(-1 - 2t^2 - \eta^2)$$

$$+ \frac{y^5}{120N^5 \cos\varphi_x}(5 + 28t^2 + 24t^4 + 6\eta^2 + 8t^2\eta^2)$$

$$+ \frac{y^7}{5040N^7 \cos\varphi_x}(-61 - 662t^2 - 1320t^4 - 720t^6)$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite ±3°

Das jeweils letzte angegebene Glied der Gleichungen kann für die GK-Abbildung vernachlässigt werden.

φ_x wird auch als Fußpunktsbreite bezeichnet, sie wird mit der Formel ***(2)*** iterativ bestimmt. Für die Meridianbogenlänge B^{φ} wird die x-Komponente der GK-Koordinate eingesetzt. Diese Größe wird anschließend für die Berechnung aller von der geographischen Breite abhängigen Variablen verwendet.

λ_0 ist die geographische Länge des Bezugsmeridians der Abbildung. Im Falle des österreichischen Landessystems (Bessel) sind dies die Meridiane 28°, 31° und 34° mit Nullmeridian Ferro ($\lambda_{Ferro} - \lambda_{Greenwich}$ = 17 ° 40 '), im Falle von UTM (ETRS89) sind dies die Meridiane 9° und 15 ° mit Nullmeridian Greenwich.

$H_{Bessel} = h + N_{Bessel}$	…ellipsoidische Höhe (über Bessel-Ellipsoid)
h	… MGI-Gebrauchshöhe (Höhe über Adria)
N_{Bessel}	… Geoidundulation bezogen auf Bessel-Ellipsoid

5. UTM-Koordinaten à geographische Koordinaten

Zur Abbildung nach UTM sind grundsätzlich die selben Formeln wie in Punkt 4 zu verwenden, die UTM-Koordinaten müssen aber vorab in eine andere Form gebracht werden.

y = (Easting(E) – 500000) / 0.9996

x = Northing(N) / 0.9996

Easting (E) und Northing (N) ist die internationale Bezeichnung für der Rechtswert (RW) und Hochwert (HW) der UTM-Abbildung.

$H_{GRS80} = h' + N_{GRS80}$	…ellipsoidische Höhe (über GRS80-Ellipsoid)
h'	… orthometrische Höhe (Bezugspegel Amsterdam)
N_{GRS80}	… Geoidundulation bezogen auf GRS80-Ellipsoid

6. Geographische Koordinaten à Gauß-Krüger-Koordinaten

Hochwert x:

$$x = B^{j} + \frac{N}{2}\Delta\lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{N}{24}\Delta\lambda^4 \sin\varphi \cos^3\varphi\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$
$$+ \frac{N}{720}\Delta\lambda^6 \sin\varphi \cos^5\varphi\,(61 - 58t^2 + t^4)$$
$$+ \frac{N}{40320}\Delta\lambda^8 \sin\varphi \cos^7\varphi\,(1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6)$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite ±3°

Rechtswert y:

$$
\begin{aligned}
y \;=\; & N\,\Delta\lambda\, \cos\varphi \;+\; \frac{N}{6}\,\Delta\lambda^3 \cos^3\varphi \;\left(1 - t^2 + \eta^2\right) \\
& + \frac{N}{120}\,\Delta\lambda^5 \cos^5\varphi \;\left(5 - 18\,t^2 + t^4 + 14\,\eta^2 - 58\,\eta^2\,t^2\right) \\
& + \frac{N}{5040}\,\Delta\lambda^7 \cos^7\varphi \;\left(61 - 479\,t^2 + 179\,t^4 - \;t^6\right)
\end{aligned}
$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite ±3°

Das jeweils letzte angegebene Glied der Abbildungsgleichungen kann für die GK-Abbildung vernachlässigt werden.

Die Meridianbogenlänge B^j [m] ist aus ***(1)*** zu berechnen.

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

λ_0 ....Bezugsmeridian der Abbildung (28°, 31° und 34° im System Ferro)

$h = H_{BESSEL} - N_{BESSEL}$ ... MGI-Gebrauchshöhe (Höhe über Adria)

H_{BESSEL} … ellipsoidische Höhe über dem Bessel-Ellipsoid

N_{BESSEL} … Geoidundulation bezogen auf Bessel-Ellipsoid

7. Geographische Koordinaten à UTM-Koordinaten

Zur Abbildung nach UTM sind grundsätzlich die selben Formeln wie in Punkt 6 zu verwenden, dass Ergebnis ist aber noch mit einem Massstabsfaktor von 0.9996 zu multiplizieren. Eine Additionskonstante wird am Rechtswert angebracht, um immer positive Werte zu bekommen.

Easting(E) = y * 0.9996 + 500000

Northing(N) = x * 0.9996

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

λ_0 ....Bezugsmeridian der UTM-Abbildung (Zone 32 = 9°, Zone 33 = 15°)

$h' = H_{GRS80} - N_{GRS80}$ ... orthometrische Höhe

H_{GRS80} … ellipsoidische Höhe (über GRS80-Ellipsoid)

N_{GRS80} … Geoidundulation bezogen auf GRS80-Ellipsoid

8. Gauß-Krüger-Koordinaten à Koordinaten des Bundesmeldenetzes

xBMN = x - 5000000

yBMN = y + konst

konst ist abhängig von den Meridianstreifensystemen M28, M31 und M34

konst = 150000 für M28
konst = 450000 für M31
konst = 750000 für M34

9. Geographische Koordinaten à 3D-kartesische Koordinaten

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+H)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 N + H\right)\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

N …Normalkrümmungsradius
H …ellipsoidische Höhe

10. 3D-kartesische Koordinaten à geographische Koordinaten

$$\tan\lambda = \frac{Y}{X}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z + e'^2\ b \sin^3\vartheta}{\sqrt{X^2+Y^2} - e^2\ a\cos^3\vartheta} \qquad \text{mit } \vartheta = \arctan\frac{Z\ a}{\sqrt{X^2+Y^2}\ b}$$

$$H = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos\varphi} - N$$

N …Normalkrümmungsradius
H …ellipsoidische Höhe

11. Transformation zwischen ETRS89 und MGI (7-Parameter-Transformation)

$\underline{X}_{BESSEL} = \underline{C} + (1 + dm)\, \underline{R}\, \underline{X}_{ETRS89}$ ... Matrizengleichung

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(z) & -\alpha(y) \\ -\alpha(z) & 1 & \alpha(x) \\ \alpha(y) & -\alpha(x) & 1 \end{pmatrix}$$ ... Rotationsmatrix (Coordinate Frame Convention)

$\underline{C} = (\Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z)$	… Verschiebungsvektor
$\alpha(x)$	… Drehung um die X-Achse
$\alpha(y)$	… Drehung um die Y-Achse
$\alpha(z)$	… Drehung um die Z-Achse
dm	… Maßstabsdifferenz zwischen beiden Systemen

Die Matrizengleichung explizit:

$$X_{BESSEL} = \Delta X + (1+dm) * [X_{ETRS89} + Y_{ETRS89} * \alpha(z) - Z_{ETRS89} * \alpha(y)]$$
$$Y_{BESSEL} = \Delta Y + (1+dm) * [- X_{ETRS89} * \alpha(z) + Y_{ETRS89} + Z_{ETRS89} * \alpha(x)]$$
$$Z_{BESSEL} = \Delta Z + (1+dm) * [X_{ETRS89} * \alpha(y) - Y_{ETRS89} * \alpha(x) + Z_{ETRS89}]$$

Österreichweiter Parametersatz:

Transformationsparameter	
ΔX =	-577.326 m
ΔY =	-90.129 m
ΔZ =	-463.919 m
dm =	-0.0000024232
α(x)=	5.137″
α(y)=	1.474″
α(z)=	5.297″

Achtung: Die Drehwinkel in obigen Gleichungen sind im Bogenmaß einzusetzen! (Winkel im Bogenmaß = Winkel in Altgrad * Pi / 180)